Ondes d'échelle. I. Partie physique - théorie linéaire (1992)

Data · January 1992

DOI: 10.13140/RG.2.1.2868.8483

1 author:

Joël Sternheimer
Genodics

O N D E S D ' E C H E L L E

Joël Sternheimer

I. PARTIE PHYSIQUE. – THÉORIE LINÉAIRE. *

Un examen attentif du rôle de l'échelle dans le processus de mesure amène à la considérer comme un paramètre physique autonome par rapport aux dimensions d'espace-temps. Les ondes d'échelle, *dont l'existence en découle dans une théorie quantique, permettent ainsi d'assurer la cohérence entre les descriptions et manifestations d'un système physique à différentes échelles d'observation. On en donne une forme explicite, permettant d'évaluer certains rapports d'échelle fondamentaux apparaissant dans la nature, et notamment dans les masses et les durées de vie des particules.*

* Extrait du pli n° 17064, déposé le 9 juin 1992 à l'Académie des Sciences (Paris) à l'initiative de son secrétaire perpétuel.

I. HISTORIQUE. En 1905, Einstein écrivait au commencement de son premier article sur la relativité restreinte: "*On sait que l'Electrodynamique de Maxwell, telle qu'elle est conçue aujourd'hui, conduit, quand elle est appliquée aux corps en mouvement, à des asymétries qui ne semblent pas être inhérentes aux phénomènes. Rappelons, par exemple, l'action mutuelle électrodynamique s'exerçant entre un aimant et un conducteur. Le phénomène observé dépend ici uniquement du mouvement relatif du conducteur et de l'aimant...*"[1]. Il inférait, en d'autres termes, d'observations de portée générale, que les propriétés de symétrie des équations de la mécanique devaient être identiques à celles de l'électromagnétisme; aussi généralisa-t-il les équations de la mécanique pour les rendre invariantes sous le même groupe de transformations que celui qui était connu à l'époque pour les équations de Maxwell, à savoir le groupe de Lorentz: ce fut la relativité.

Mais trois ans après, le mathématicien anglais Bateman[2] remarqua, lors d'une discussion avec son élève Cunningham, que les équations de Maxwell étaient aussi invariantes sous les inversions par rapport aux hypersphères centrées à l'origine de l'espace de Minkowski, qui n'étaient pas contenues dans le groupe de Lorentz: cherchant alors le groupe le plus général d'invariance des équations de Maxwell, Cunningham l'identifia comme étant le groupe conforme, c'est-à-dire le groupe le plus général préservant les angles dans l'espace-temps, qui généralisait le groupe de Lorentz avec une dimension genre espace et une dimension genre temps supplémentaires.

Ne convenait-il pas dès lors de modifier la mécanique en conséquence? Plutôt que d'introduire des dimensions supplémentaires à l'espace-temps, dont l'interprétation physique lui paraissait obscure, Einstein courba simplement celui-ci en élaborant la relativité générale[3]. Mais en 1919 Hermann Weyl[4] isola un sous-groupe (aujourd'hui appelé groupe de Weyl) du groupe conforme, correspondant à l'invariance d'échelle; et en 1964, Christopher Zeeman[5] montra que ce groupe était celui qui préservait l'ordre de la cause et de l'effet dans l'espace-temps (à savoir $x \leq y$ si y est dans le cône de lumière de x). Moshé Flato et Daniel Sternheimer relevèrent alors un paradoxe apparent: le "groupe causal" serait dans ce cas strictement plus petit que le groupe d'invariance des équations du photon, particule avec laquelle on définit la causalité; et montrèrent que la symétrie la plus générale préservant l'ordre considéré par Zeeman était celle de l'*algèbre de Lie* (c'est-à-dire les transformations infinitésimales) du groupe conforme[6].

Entre-temps était apparue la mécanique quantique, qui amenait à remplacer les invariants de la mécanique par des opérateurs dont les valeurs propres donnaient les différents résultats de mesure possibles, et dont les fonctions propres décrivaient une onde se déplaçant dans l'espace-temps. En 1932, Majorana eut l'idée que les divers types de particules existantes n'étaient autres que les différents invariants spatio-temporels compatibles avec l'équation d'ondes quantique décrivant leur comportement, et partant de là entreprit, en vue de classifier les particules, de calculer toutes les représentations du groupe de Lorentz (travail que Wigner compléta en 1938)[7]: il effectua toutefois "par simplicité" les calculs dans l'algèbre de Lie, choix dont les résultats cités plus haut sont en réalité venus confirmer le bien-fondé physique.

En 1966, le théorème de Jost et Segal[8], montrant l'impossibilité d'obtenir un spectre de masse pour les particules dans un *groupe* contenant celui de Lorentz ne laissait de toute façon plus d'autre choix: seules pouvaient convenir des représentations non intégrables sur le groupe; et, en 1969, M. Flato et D. Sternheimer[9] purent donner des représentations de diverses algèbres de Lie contenant celle du groupe de Lorentz et fournissant un spectre de masse. Mais, pour que la "masse généralisée" qu'ils introduisaient ainsi pût redonner la masse relativiste dans l'espace-temps, en d'autres termes pour que les représentations ainsi considérées, non intégrables sur tout le groupe, fussent cependant intégrables sur le groupe de Poincaré (Lorentz inhomogène), ils ont été amenés à introduire (en vue de la "couper" dans une représentation locale) l'échelle précisément, comme dimension supplémentaire à l'espace-temps.

En 1983, mettant en évidence le caractère exponentiel du spectre de masse des particules, je pus donner une représentation du type ci-dessus, de l'algèbre de Lie du groupe de Weyl, fournissant un spectre de masse exponentiel[10]. Dans ces conditions, l'opérateur quantiquement associé à la masse n'était plus $p_\mu = -i\partial/\partial x_\mu$ mais $p_\mu e^{-i\alpha\partial_s}$, où $\partial_s = \partial/\partial s$ (d'où $[\partial_s , s] = 1$)

est l'opérateur canoniquement conjugué de l'échelle s, et α une constante s'annulant à la limite où l'invariance d'échelle disparaît. L'équation d'ondes devient alors (sous sa forme Klein-Gordon par exemple, c'est-à-dire pour chaque composante de spin):

$$\Box e^{-2\alpha i \partial_s} \psi = m^2 \psi \qquad (1)$$

où ψ prend ses valeurs dans l'espace-temps et dans l'échelle: les ondes de la mécanique quantique deviennent ainsi des *ondes d'échelle*.

II. Que signifie ce concept? Il s'agit en réalité, intuitivement, de quelque chose d'assez évident: comment un *individu* reconnaît-il ses composantes? Par l'intermédiaire des ondes d'échelle, précisément: ce sont elles qui permettent d'assurer la cohérence entre les descriptions de cet individu aux différentes échelles, en particulier entre son échelle à lui et l'échelle de ses composantes[11]; de la même façon que les ondes de la mécanique quantique permettent d'assurer la cohérence entre les descriptions d'une particule ou d'un système physique en différents points de l'espace-temps -- mais à ceci près, ainsi que nous le verrons, que la limitation de la portée de l'échelle a ici des conséquences spécifiques. Pour la mécanique classique en effet, la matière était entièrement décrite en terme de particules interagissant de façon déterminée par la donnée de leurs positions et impulsions à un instant quelconque pris comme origine, et par la forme des lois régissant ces interactions. Les relations d'incertitude quantiques, en établissant une limite à la précision simultanée des positions et des impulsions, ont modifié cette image en introduisant dès l'origine une indétermination, qui ne peut que se répercuter sur les états ultérieurs d'un système: mais n'expliquent toujours pas comment notre individu, composé de particules, peut décider d'accomplir un acte, et l'accomplir... Ainsi que l'exprimaient, entre autres, Wigner et Von Neumann, "*la présente théorie quantique... ne recouvre pas le phénomène de la vie. Le processus de mesure par un être vivant, si discuté dans la littérature, le prouve clairement... Cela reste un sérieux problème*"[12].

Précisément, faire une mesure, c'est d'abord déterminer l'échelle du phénomène que l'on veut mesurer. En mécanique classique, ceci est possible de façon intrinsèque, soit par comptage et repérage direct des particules "élémentaires" composant le système, soit par référence à un étalon donné a priori et lui-même exprimable de cette façon (ce qui conduit alors à déterminer expérimentalement un rapport d'échelle tel que le "nombre d'Avogadro"); mais dans la réalité, il est par exemple impossible d'identifier expérimentalement une particule sans la donnée d'un paramètre, tel que l'énergie du faisceau incident de particules ou la taille des bulles observées dans le détecteur, déterminant cette échelle du phénomène mesuré: on ne peut pas dire intrinsèquement à quelle échelle on se trouve. Il s'agit là d'une propriété d'invariance d'échelle, signifiant que, contrairement à la vision classique, l'échelle, ou plus exactement l'opérateur qui la représente, ne commute pas avec ceux, liés à l'espace-temps, représentant l'impulsion et l'énergie.

Nous voyons ainsi que cette non-commutativité est étroitement liée au processus de mesure. Toute mesure nécessite en effet l'intervention de deux systèmes, un appareil de mesure et un phénomène mesuré, ayant chacun leurs limites propres: d'un côté, la précision de la mesure ne pourrait théoriquement être infinie qu'à l'approximation où un nombre très grand, de l'ordre du nombre de corpuscules composant cet appareil, serait lui-même infini; de l'autre, comme dans l'exemple ci-dessus, le phénomène mesuré lui-même se situe sur une échelle ayant une certaine portée: nous devrons inclure dans notre étude *deux nombres* afin d'en tenir compte. La détermination de l'échelle impliquée par la mesure devra elle-même tenir compte de ces deux limitations: une certaine combinaison des deux nombres ci-dessus va ainsi apparaître dans le résultat. A l'approximation où le nombre de corpuscules composant l'appareil serait infini et où, le phénomène mesuré étant (comme en mécanique classique) parfaitement localisé dans l'échelle, la portée de celle-ci serait nulle, cette combinaison serait, par exemple, indéterminée; mais en-dehors de cette approximation elle sera *déterminée*, et la théorie que nous sommes en train d'élaborer devrait donc, en principe, être capable de nous fournir les rapports d'échelle fondamentaux apparaissant dans la nature, tels que, notamment, dans les masses des particules.

III. C'est, précisément, le problème du spectre de masse qui historiquement, on l'a vu, a amené à considérer l'opérateur d'échelle écrit ci-dessus. Si en effet, on avait considéré une représentation usuelle de l'algèbre de Lie du groupe de Weyl telle que $p_\mu = -i\partial/\partial x_\mu$ pour les impulsions et $s = x_\mu . \partial/\partial x_\mu$ pour l'opérateur d'échelle -- ce qui fournit bien la relation de commutation $[p_\mu, s] = p_\mu$ dans l'algèbre de Lie engendrée par ces opérateurs --, on obtiendrait soit un spectre continu ou une masse nulle pour un domaine de définition de ces opérateurs allant de $-\infty$ à $+\infty$, c'est-à-dire pour une représentation intégrable; soit, en limitant ce domaine de définition pour l'opérateur d'échelle s, on limiterait aussi l'espace-temps et la représentation ne serait plus intégrable sur le groupe de Poincaré. La définition du § I, qui reconnaît donc à l'échelle un statut autonome, fournit bien elle aussi (posant $p_{\mu,\alpha} = p_\mu e^{-i\alpha\partial/\partial s}$) la relation $[p_{\mu,\alpha}, (i/\alpha)s] = p_{\mu,\alpha}$, mais amène dès lors d'une part à *modifier la définition des impulsions* en retrouvant l'ancienne définition à la limite où, α tendant vers 0, l'échelle commute avec elles; et d'autre part l'obtention d'un spectre de masse nécéssite de *limiter la portée de l'échelle* s de 0 à $2\pi/\beta$, où β est le deuxième nombre de notre discussion: on comprend bien alors, la nécéssité d'une représentation *locale*. De plus dans ces conditions, la représentation de l'algèbre de Lie du groupe de Weyl ainsi définie est bien intégrable sur le groupe de Poincaré et fournit le spectre de masse $m = m_\circ e^{\alpha\beta n}$, où n est un entier et $m_\circ$ une constante. Mais nous sommes aussi conduits à des conséquences nouvelles: que vont nous donner ces ondes d'échelle?

IV. Essayons donc de résoudre leur équation de propagation sous sa forme la plus simple, (1) ci-dessus. L'écrivant sous la forme $\Psi(x_\mu, s) = \mathscr{A}(x_\mu, s) e^{i\phi(x_\mu, s)}$ et recherchant d'abord une solution particulière d'amplitude $\mathscr{A}$ constante et de phase $\phi = p_{\mu,\alpha} x_\mu + \xi s$, il vient

$$\sqrt{-p_{\mu,\alpha} p_{\mu,\alpha}} = m = m_\circ e^{\alpha\xi} \qquad (2)$$

soit une transposition de la fréquence $\nu_\circ = m_\circ c^2/h$ d'un facteur $e^{\alpha\xi}$.

Comment comprendre cette transposition? Dans une interprétation passive, on reconnaît déjà là le spectre de l'opérateur $p_{\mu,\alpha} p_{\mu,\alpha}$: c'est-à-dire, sur $\mathcal{L}^2(0, 2\pi/\beta)$, le spectre de masse des particules; ξ est donc de la forme $\xi = \beta n$, où n est entier. Mais dans une interprétation active, il faut admettre que tout ce spectre de fréquences est en fait associé à *une* particule. Or son occurence même provient du fait que la portée de l'échelle est *finie*: en d'autres termes, *chaque particule possède une étendue dans l'échelle, se manifestant par tout un spectre* *d'harmoniques*. Avec le $p_{\mu,\alpha}$ considéré, ceci implique, comme nous verrons (§ V), l'existence de "niveaux de structure" à différentes échelles, qui sont donc contenus en puissance dans la structure même des particules; tandis que les harmoniques vrais correspondent à la déformation *linéaire* de $p_{\mu,\alpha}$ (cf.[10]), valable sur toute région d'amplitude (calculée comme en V) constante pour l'onde d'échelle: on comprend ainsi que le spectre de masse -- caractérisé essentiellement par la valeur du produit $\alpha\beta$ -- réponde aux solutions de l'équation diophantienne $pe^{\alpha\beta n} = qe^{\alpha\beta n'}$ (ou plus exactement aux meilleures approximations en nombres entiers p, q, n et n' de cette équation), comme j'avais pu le montrer en 1983: ceci indique en même temps que les niveaux de structure effectifs *rétroagissent* sur la fréquence (et l'amplitude) des harmoniques. Les vibrations des particules sont, deux à deux, en accord musical parce qu'elles sont individuellement en accord, non pas avec leurs seules sous-unités éventuelles, mais avec l'ensemble d'entre elles considéré comme une unité physique, dans tout système physique effectif. (Ces dernières considérations supposent, en toute généralité, une extension *non-linéaire* de l'équation (1), qui sera décrite dans la partie $\mathcal{B}$ de ce travail).

Le point de vue que nous développons ici redonne donc à la causalité des phénomènes un sens qui rejoint sa signification naïve, et non plus celui de la mécanique classique. En effet, pour cette dernière, la causalité se situe en quelque sorte à l'échelle, supposée parfaitement définie, des corpuscules les plus élémentaires. La mécanique quantique a montré l'impossibilité stricte de cette conception, mais sans y renoncer sur le fond, c'est-à-dire que "ce qu'il en reste" se situe toujours à l'échelle des corpuscules "les plus élémentaires". Ici nous sommes amenés à considérer des portées d'échelle finies: en d'autres termes, un phénomène pourra apparaître transgresser à une échelle donnée la causalité, mais parce que la cause sera en fait complétée, voire principalement située, à une autre échelle, *qui n'est plus nécessairement celle des corpuscules "les plus élémentaires"*. Il est remarquable que cette notion, qui bat quelque peu en brèche un point de vue, communément appelé "cartésien", selon lequel c'est en décomposant l'objet d'étude que l'on peut le comprendre (avec toutes les difficultés éthiques que son application concrète peut entraîner), apparaisse clairement du fait de l'association d'*harmoniques* aux corpuscules de la mécanique, alors que le concept même[13] d'harmoniques a été introduit par Descartes! Simplement, du point de vue vibratoire, "la décomposabilité va en sens inverse"[10] du point de vue corpusculaire, ce qui amène à relativiser les choses.

Ainsi que je l'ai montré en 1983, les meilleures solutions de la relation diophantienne érite ci-dessus sont $\alpha\beta$ = Log2/N où N = 1, 12, 72... pour des vibrations associées aux particules incluant respectivement 2, 6, 12... harmoniques. L'étude expérimentale du spectre de masse confirme ces solutions[10,14], qui rendent compte par ailleurs de nombreuses relations empiriques publiées dans la littérature[15].

V. Si maintenant nous faisons varier l'amplitude $\mathscr{A}$ en fonction de l'échelle, il vient en reportant dans (1) le résultat précédent

$$e^{i\alpha\partial/\partial_s}\mathscr{A} = \mathscr{A} \qquad (3)$$

c'est-à-dire que $\mathscr{A}$ est périodique de période imaginaire pure $i\alpha$, et donc que toute fonction de $e^{(2\pi/\alpha)s}$, pouvant être développée sous la forme

$$\mathscr{A}(s) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \mathscr{A}_\ell \, e^{(2\pi\ell/\alpha)s} \qquad (4)$$

où $\mathscr{A}_\ell$ ne dépend pas de s, est à priori une solution.

La forme générale de l'amplitude d'une onde d'échelle sera alors, pour une dépendance temporelle en $e^{-t/2T}$ de l'amplitude de la fonction d'onde d'une particule de durée de vie T (en posant $x_0 = t$), et pour une dépendance spatiale de la forme $e^{-\Theta(\mathbf{r}-r_0)^2/2a^2}$ au voisinage de l'origine (où $\mathbf{r}$ a pour coordonnées x_1, x_2, x_3):

$$\mathscr{A}(s,t,\mathbf{r}) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \mathscr{A}_\ell \, e^{2\pi\ell s/\alpha - t/2T - \Theta(\mathbf{r}-r_0)^2/2a^2}. \qquad (5)$$

Nous sommes donc arrivés au double résultat suivant: d'une part, considérant la variation suivant l'échelle et le temps de l'amplitude de l'onde, celle-ci apparaît comme une superposition d'*ondes progressives* exponentielles dans l'échelle, de vitesses $\alpha/4\pi\ell T$, c'est-à-dire parcourant la portée de l'échelle $2\pi/\beta$ dans les deux sens pendant des durées égales à $8\pi^2T/\alpha\beta$ et aux multiples entiers de cette durée. La périodicité qui apparaît ainsi dans les arrivées d'ondes d'échelle à une échelle donnée permet de comprendre l'existence de relations de type musical, c'est-à-dire de phénomènes de consonance -- synchronisation d'harmoniques -- se déroulant suivant un certain rythme, dans les processus auxquels participent les particules. Plus précisément, ces synchronisations entre échelles différentes vont entraîner, outre les relations entre les masses, des contraintes du type relations entre les *durées de vie* de différentes particules, de la forme

$$T_1/T_2 = (\ell_1/\ell_2)(8\pi^2/\mathrm{Log}2)^n \qquad (6)$$

pour N = 1, où les entiers ℓ_1 et ℓ_2 proviennent de (4) et n désigne le rang (ordinal) de chaque "famille" de particules synchronisée à travers l'échelle à partir de la précédente. L'expérience confirme remarquablement (Fig. 1): on a par exemple, désignant par $T_{P_1 P_2 \ldots}$ la moyenne des durées de vie des particules P_1, P_2...[16], les relations $T_\mu = (114{,}43 \pm 0{,}15).T_{\pi^\pm K^\pm} = (113{,}3 \pm 0{,}9)^2.T_{\Lambda\Sigma^\pm\Xi\,\Omega^-} = (5/2).(114 \pm 4)^3.T_{\tau D D_s B \Lambda_c \Xi_c}$, en remarquable accord avec la formule (6) et la valeur $8\pi^2/\mathrm{Log}2 = 113{,}91$.

D'autre part, la dépendance spatio-scalaire $\mathscr{A}(\mathbf{r},s)$ de l'amplitude de l'onde d'échelle la fait apparaître à chaque instant comme un "microscope" de grossissement focal $2\sqrt{\mathcal{O}(2\pi|\ell|s/\alpha)}$, soit $2\pi\sqrt{2\mathcal{O}(|\ell|/\alpha\beta)} \simeq 2\pi\sqrt{2|\ell|/\mathrm{Log}2} = 10{,}67\sqrt{|\ell|}$ pour N = 1 sur la portée $2\pi/\beta$ de l'échelle; c'est-à-dire que l'onde relie entre eux différents niveaux, que l'on voit ainsi apparaître, de hiérarchies de structures spatiales, en les synchronisant globalement d'après le résultat précédent.

VI. Pour mieux comprendre cette interaction entre échelles différentes, remarquons d'abord que les considérations qui précèdent ne font pas intervenir d'hypothèse sur la forme précise de l'échelle; mais que, pour chaque forme explicite, les solutions obtenues pour l'expression de l'onde incluent des paramètres reliés à la portée de l'échelle. Ceci signifie que les phénomènes quantifiés par ces solutions *n'apparaissent effectivement qu'à une certaine échelle*: c'est-à-dire que l'on observe l'émergence de niveaux d'intégration, dont l'existence même rétroagit sur les niveaux antérieurs, et sur la forme des lois qui les gouvernent. Un exemple simple en est déjà fourni par les harmoniques dont nous avons considéré l'occurence dans les vibrations associées aux particules, la constante β, reliée à la portée de l'échelle, apparaissant ici dans la phase de l'onde: l'existence même de ces harmoniques apparaît donc comme une conséquence de la finitude de la portée de l'échelle, et on notera qu'elle implique la possibilité de diviser l'incertitude quantique sur une mesure d'énergie $h\nu$, effectuée pendant un temps Δt, par le rang n de l'harmonique suivant lequel on effectue cette mesure: car si $\Delta(nh\nu).\Delta t \geq h$, $\Delta(h\nu).\Delta t \geq h/n$. Sans rien modifier de la structure algébrique de la théorie quantique comme le montre la théorie des déformations[17], cet exemple montre déjà bien comment un lien entre deux échelles -- ici simplement celle d'*une* vibration fondamentale associée à une particule, et une autre échelle impliquant l'existence d'harmoniques associés à cette vibration -- peut modifier une loi au sens que nous venons d'évoquer. Il peut en outre, dans ce cas particulier, apporter une explication à des faits qui intriguent depuis longtemps les physiciens, tels que la précision des régularités (presque linéaires) entre les masses des résonances baryoniques de spin $(3/2)^+$ -- le $\Delta(1232)$, le $Y^*(1385)$ et le $\Xi^*(1530)$ -- de largeurs pourtant élevées, mais dont le prolongement a cependant permis la prédiction, avec une certaine précision, de la masse de la particule métastable $\Omega^-(1672)$.

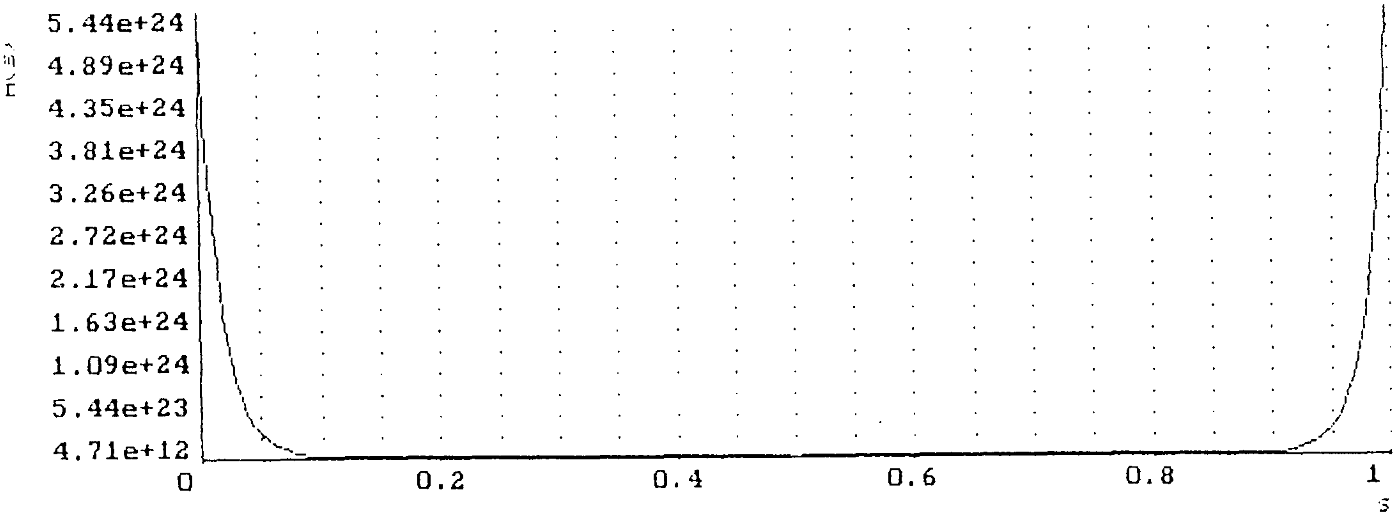
VII. Penchons-nous maintenant sur l'expression (4) de l'amplitude de l'onde en fonction de l'échelle. Si nous considérons d'abord le couple d'ondes d'échelle les plus rapides (c'est-à-dire $|\ell|=1$), cette expression sera de la forme

$$\mathscr{A}(s) = A_1 e^{2\pi s/\alpha} + A_{-1} e^{-2\pi s/\alpha} \; ; \qquad (7)$$

supposant pour fixer les idées une amplitude égale aux deux bornes $s=0$ et $s=2\pi/\beta$, il vient $A_{-1}=A_1(e^{4\pi^2/\alpha\beta}-1)/(1-e^{-4\pi^2/\alpha\beta}) \cong e^{4\pi^2/\alpha\beta}A_1$ car $e^{4\pi^2/\alpha\beta}$ est toujours très grand devant 1, d'où

$$\mathscr{A}(s) \cong A_1(e^{2\pi s/\alpha} + e^{4\pi^2/\alpha\beta - 2\pi s/\alpha}) \qquad (8)$$

admettant un minimum pour $s=\pi/\beta$ de valeur $\mathscr{A}(\pi/\beta) = 2A_1 e^{2\pi^2/\alpha\beta}$.



Profil de l'onde d'equation (8)

pour N = 1 (soit $\alpha\beta$ = Log2): en abscisse, l'échelle s (avec la portée $2\pi/\beta$ = 1 ci-dessus); en ordonnée l'amplitude (avec A_1 = 1).

Le carré $\mathscr{A}^2(s)$ de cette amplitude, qui représente la probabilité d'occurence d'une particule dans l'échelle des masses, varie donc dans des proportions considérables dont l'ordre de grandeur, qui ne dépend guère des conditions précises aux bornes ni de l'adjonction d'ondes d'échelle plus lentes, est donné par le nombre $(1/4)e^{4\pi^2/\alpha\beta}$ soit $(1/4)e^{4\pi^2/\mathrm{Log}2} = 1{,}359.10^{24}$ pour $N = 1$. Il est remarquable que ce soit bien là un nombre à l'échelle du nombre de corpuscules identiques (protons et électrons) dans un objet macroscopique tel qu'un appareil de mesure (nombre d'Avogadro): si $\alpha\to 0$, la limite à laquelle l'échelle commute avec les p_μ représentant l'impulsion et l'énergie correspond bien à l'approximation dans laquelle on considérerait ce nombre comme infini.

Une première idée de la pertinence des calculs ci-dessus (et de l'existence d'ondes d'échelle stationnaires ayant une portée de l'ordre du nombre d'Avogadro et de ses puissances) peut être alors donnée à l'aide du raisonnement suivant: considérons la distribution des durées de vie des résonances baryoniques et mésoniques (cf. Fig. 1) comme traduisant le carré de l'amplitude d'une onde d'échelle, de la forme (8); on peut par ajustement en déduire la valeur de la portée de l'échelle, que l'on peut alors identifier comme nous donnant, en unités de $10^{-23,5}$s, la stabilité de la matière: le résultat, obtenu en prenant la moyenne des valeurs déduites de plusieurs calibrages pour l'histogramme de la Fig. 1, vaut $10^{70\pm4}$ (moyenne de 8 valeurs), compatible avec le cube du nombre calculé ci-dessus; ce qui nous donne pour la matière en général une durée de vie de $10^{39\pm4}$ années, comprise entre la limite expérimentale de 10^{32} années au moins[16] et les estimations quantiques gravitationnelles[18] de l'ordre de 10^{45} ans pour une durée maximale de vie du proton. D'autres applications et calculs du même type peuvent être donnés, avec des précisions relatives du même ordre; mais c'est dans les systèmes biologiques que les applications les plus intéressantes peuvent être aujourd'hui apportées, ainsi que nous allons le montrer dans la suite. En fait, les ondes d'échelle vont permettre d'aborder un domaine complètement nouveau de la physiologie moléculaire.

Je remercie André Lichnerowicz, Moshé Flato, Sylvain Baron et Vincent Bargoin pour leurs précieux encouragements et une lecture critique du manuscrit.

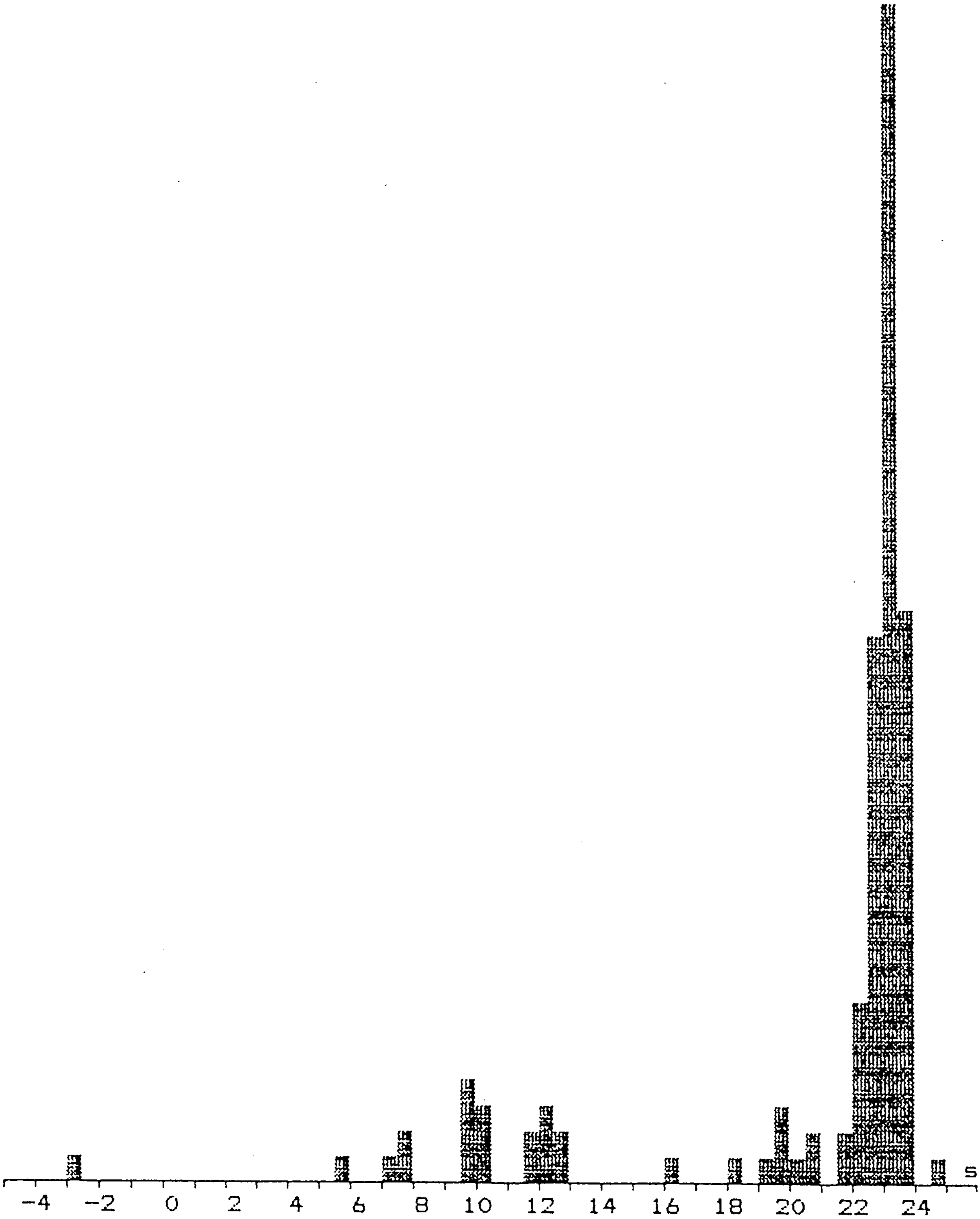


Figure 1. Histogramme des particules élémentaires suivant l'échelle $s = -\log_{10} T$ de leurs durées de vie T (en secondes).

A gauche (s=-2,95) le neutron; à droite, les particules à désintégration électromagnétique ($s \geq 16$) et forte ($s \geq 22$); au centre, la "petite famille" des particules métastables ($5 \leq s \leq 13$). L'écart entre les "membres" provenant des synchronisations d'ondes d'échelle vaut $\Delta s = \log_{10}(8\pi^2/\mathrm{Log}2) \cong 2{,}06$ (cf. § V).

Références

[1] A. Einstein, *Ann. Physik*, t.17, 1905 (traduction M. Solovine).

[2] H. Bateman, *Proc. London Math. Soc.* 8, 223 (1910); E. Cunningham, *idem*, 8, 77 (1910).

[3] A. Einstein, *Correspondance avec Besso*, 110.1, note *a* (1931).

[4] H. Weyl, *Raum Zeit Materie*, Berlin (1919).

[5] E. C. Zeeman, *J. Math. Phys.* 5, 490 (1964).

[6] M. Flato et D. Sternheimer, *Comptes rendus* 263, 935 (1966).

[7] E. Majorana, *Nuov. Cim.* 9, 335 (1932); E. P. Wigner, *Ann. of Math.* 40, 1 (1939).

[8] R. Jost, *Helv. Phys. Acta* 39, 369 (1966); I. E. Segal, *J. Funct. Anal.* 1, 1 (1967). Ce théorème rectifiait en fait un énoncé antérieur de L. O'Raifeartaigh, *Phys. Rev. Lett.* 14, 575 (1965), en montrant qu'il s'appliquait aux groupes, mais non aux algèbres de Lie; c'est précisément cette distinction qui importe ici.

[9] M. Flato et D. Sternheimer, *Commun. Math. Phys.* 12, 293 (1969).

[10] J. Sternheimer, *Comptes rendus* 297, 829 (1983). L'induction, à partir du spectre exponentiel, de cette modification de l'opérateur de masse est due à M. Flato.

[11] La nécessité d'un principe physique à ce sujet a été évoquée (dans un autre contexte) par A. Zee, *Phys. Lett.* 95B, 290 (1980).

[12] E. P. Wigner, *J. Phys.* 43, C8-435 (1982).

[13] R. Descartes, *De Musicae Compendium*, Paris (1618).

[14] J. Sternheimer, *Colloque international "Louis de Broglie, physicien et penseur"*, Ancienne Ecole Polytechnique, Paris (1987); *Séminaire de physique mathématique*, Collège de France (1984) [reproduit in *Rev. Bio-Math.* 94, 1 (1986)]; P. Demers, à paraître.

[15] T. Takabayasi, *Buturi* 68, 286 (1963) [relations $m_\Xi^2 \simeq 2m_N^2$, $m_N m_\Xi \simeq m_\Lambda^2$, $m_N^2/2 \simeq m_\Lambda m_\Sigma/3...$]; R. M. Sternheimer, *Phys. Rev.* D136, 1364 (1964) [nombreuses relations de la forme $m_a = (p/q) m_b$, c'est-à-dire d'accord harmonique]. Les deux "constantes universelles" de la forme $\Delta m/m$, à savoir $\theta \cong 0{,}1187...$ -- observée par J. Schwinger, *Phys. Rev. Lett.* 18, 797 (1967) dans les masses des baryons, avec $\theta/2$ chez les mésons, cf. *Phys. Rev.* 165, 1714 (1968) -- et $\eta \simeq 0{,}01...$ (cf. F. Gürsey et M. Serdaroglu, *Lett. al Nuov. Cim.* 1, 233 (1969)) trouvent en particulier leur explication ($\theta/2 = 2^{1/12}-1$ et $\eta = 2^{1/72}-1$, cf.[10]). Notons encore le spectre de masse des leptons, $m_\mu/m_\tau \cong \theta/2$ et $m_e/m_\mu \cong \eta/2$.

[16] Particle Data group, *Phys. Letters* B239 (1990). Nous avons simplement pris les moyennes arithmétiques des valeurs tabulées dans cette référence; de nombreuses relations similaires peuvent être écrites entre particules individuelles.

[17] M. Flato, A. Lichnerowicz et D. Sternheimer, *J. Math. Phys.* 17, 1754 (1976); cette remarque est due à André Lichnerowicz.

[18] Ya. B. Zeldovich, *Phys. Lett.* 59A, 254 (1976).

Paris, 24 janvier 1992.